Ad-Soyad :

Numara :

MAT 201 Lineer Cebir I Final Sınavı Cevap Anahtarı 24.01.2023

Not: Sorular eşit puanlı ve süre 90 dakikadır. Çözümlerinizi ayrıntılı olarak yazınız. Öğrenmediğimiz yöntemlerle yapılan çözümler kabul edilmeyecektir. Başarılar dilerim.

1) Aşağıdaki soruları yanında bulunan parantez içine doğru ise "D", yanlış ise "Y" yazarak cevaplayınız.

(D) Her vektör uzayı değişmeli gruptur.

(D) Bir grubun keyfi iki alt grubunun kesişimi de bir alt gruptur.

(Y) Bir vektör uzayının keyfi iki alt vektör uzayının birleşimi de bir alt vektör uzayıdır.

(Y) Vektör uzayının boyutu baza göre değişir.

(Y) Her halka bir cisimdir.

2) $U=\{(1,1,1),(1,-1,1),(2,0,1)\}\subset\mathbb{R}^3$ veriliyor.

a) U lineer bağımsız mıdır?

b) U, $\mathbb{R}^3$ için baz mıdır?

3) V bir reel vektör uzayı olmak üzere $\forall x,y\in V$ için

$$\langle x+y,\ x-y\rangle=\|x\|^2-\|y\|^2$$

olduğunu gösteriniz.

4) $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ L(x,y)=(|x+y|,|x-y|)$ fonksiyonunun bir lineer dönüşüm olup olmadığını araştırınız.

5) $(1,-1,4)\notin sp\{(2,3,5),(-1,0,6),(1,3,11)\}$ olduğunu gösteriniz.

Cevaplar

2) a) $a(1,1,1)+b(1,-1,1)+c(2,0,1)=(0,0,0)=0_{\mathbb{R}^3}$ olsun.

$(a+b+2c,\ a-b,\ a+b+c)=(0,0,0)$

$$\left.\begin{array}{l}a+b+2c=0\\ a-b=0\Rightarrow b=a\\ a+b+c=0\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}2a+2c=0\\ 2a+c=0\end{array}\right\}\ c=0\Rightarrow a=b=0\Rightarrow U \text{ lineer bağımsızdır.}$$

b) boy $\mathbb{R}^3=3$ ve $U\subset\mathbb{R}^3$, 3 elemanlı lineer bağımsız küme olduğundan U, $\mathbb{R}^3$ ün bir bazıdır.

3) $\langle x+y, x-y\rangle = \langle x, x-y\rangle + \langle y, x-y\rangle = \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle - \langle y,y\rangle$

(1. yere göre Lineerlik) (2. yere göre Lineerlik)

$= \|x\|^2 - \cancel{\langle x,y\rangle} + \cancel{\langle x,y\rangle} - \|y\|^2$

(Simetri)

4) $u=(1,0),\ v=(-1,0)\in\mathbb{R}^2$ için

$L(u+v)=L((1,0)+(-1,0))=L(0,0)=(0,0)$

$L(u)=L(1,0)=(1,0)$

$L(v)=L(-1,0)=(1,0)$

L Lineer dönüşüm olsaydı $L(u+v)=L(u)+L(v)$ olurdu.

$L(u+v)=(0,0)\neq(2,0)=(1,0)+(1,0)=L(u)+L(v)$

olduğundan L bir lineer dönüşüm değildir.

5) $(1,-1,4)\in sp\{\underbrace{(2,3,5)}_{u},\underbrace{(-1,0,6)}_{v},\underbrace{(1,3,11)}_{w}\} \Leftrightarrow (1,-1,4)$; u,v ve w nın bir lineer birleşimidir. $\Leftrightarrow (1,-1,4)=au+bv+cw$ olacak şekilde $a,b,c\in\mathbb{R}$ bulunabilir.

$(1,-1,4)=a(2,3,5)+b(-1,0,6)+c(1,3,11)$ (*)

$\Leftrightarrow (2a-b+c,\ 3a+3c,\ 5a+6b+11c)=(1,-1,4)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a-b+c=1 \\ 3a+3c=-1 \\ 5a+6b+11c=4 \end{cases}$

2. denklemi 3e bölersek $a+c=-\frac{1}{3}$ ve
1. denklemin 6 katını 3. denklem ile toplarsak

$$\begin{array}{r} 12a-6b+6c=6 \\ +\ 5a+6b+11c=4 \\ \hline 17a+17c=10 \end{array} \Rightarrow a+c=\frac{10}{17}$$ çelişkisini

elde ederiz.

O halde, (*) eşitliğini sağlayacak $a,b,c\in\mathbb{R}$ yoktur ve böylece $(1,-1,4)\notin sp\{u,v,w\}$ sonucuna varılır.